DS n°4 : ED, nombres réels, suites, limites – Corrigé

Noté sur 115 pts ±5 pts pour le soin et la clarté,
puis la note est ramené sur 20 en multipliant par 20/105.

/15 **Exercice 1 : Équations différentielles**

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

/4,5 **1)** Résoudre : $\begin{cases} y'' + 2y' + 10y = 0 \\ y(0) = 0, \quad y'(0) = 3 \end{cases}$

L'équation caractéristique est

$$r^2 + 2r + 10 = 10$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 4 - 40 = -36 < 0$. L'équation admet donc deux solutions complexes conjuguées :

$$r_\pm = \frac{-2 \pm 6i}{2} = -1 \pm 3i$$

Ainsi les solutions de l'équation $y'' + 2y' + 10y = 0$ sont

$$y(x) = e^{-x}(A\cos(3x) + B\sin(3x)) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}$$

Cherchons $A, B \in \mathbb{R}$ tels que $y(0) = 0$ et $y'(0) = 3$. Tout d'abord,

$$y(0) = 0 \iff 1 \times (A \times 1 + B \times 0) = 0 \iff A = 0$$

Ainsi $y(x) = e^{-x} B \sin(3x)$. Calculons $y'(x)$:

$$y'(x) = -e^{-x} B \sin(3x) + 3e^{-x} B \cos(3x)$$

Donc

$$y'(0) = 3 \iff 0 + 3B = 3 \iff B = 1$$

Finalement, l'unique solution du problème de Cauchy est :

$$\boxed{y(x) = e^{-x}\sin(3x)}$$

/2 **2)** **a)** Résoudre : $y'' - 4y' + 4y = 0$.

L'équation caractéristique est

$$r^2 - 4r + 4 = 0$$

Le discriminant de cette équation est $\Delta = 16 - 16 = 0$. L'équation admet donc une racine double (évidente) $r_0 = 2$ et les solutions sont les fonctions de la forme

$$\boxed{y(x) = e^{2x}(A + Bx) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

/8,5 **b)** En déduire les solutions de : $y'' - 4y' + 4y = \text{ch}(2x)$.

On remarque que $\text{ch}(2x) = \frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{2}e^{-2x}$. On va appliquer le principe de superposition.

- On cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$. On pose

  $$y_1(x) = Ce^{-2x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

  On a alors

  $$y_1'(x) = -2Ce^{2x} \qquad\qquad y_1''(x) = 4Ce^{2x}$$

  On injecte dans l'équation :

  $$\begin{aligned} & y_1'' - 4y_1' + 4y_1 = e^{-2x} \\ \iff & 4Ce^{-2x} + 8Ce^{-2x} + 4Ce^{-2x} = e^{-2x} \\ \iff & 16C = 1 \\ \iff & C = \frac{1}{16} \end{aligned}$$

  Ainsi $y_1(x) = \frac{1}{16}e^{-2x}$ est solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = e^{-2x}$.
- On cherche une solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$. (Puisque 2 est racine double de $r^2 - 4r + 4 = 0$) on pose

  $$y_2(x) = Cx^2e^{2x} \qquad \text{avec } C \in \mathbb{R}$$

  On a alors

  $$y_2'(x) = (2Cx + 2Cx^2)e^{2x} = 2C\left(x^2 + x\right)e^{2x}$$

$$y_2''(x) = 2C\left(2x+1+2x^2+2x\right)e^{2x} = 2C\left(2x^2+4x+1\right)e^{2x}$$

On injecte dans l'équation :

$$\begin{aligned}
& y_2'' - 4y_2' + 4y_2 = e^{2x} \\
\iff & e^{2x}\left[2C\left(2x^2+4x+1\right) - 8C\left(x^2+x\right) + 4Cx^2\right] = e^{2x} \\
\iff & 4Cx^2 + 8Cx + 2C - 8Cx^2 - 8Cx + 4Cx^2 = 1 \\
\iff & 2C = 1 \\
\iff & C = \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

Ainsi, $y_1(x) = \frac{1}{2}x^2e^{2x}$ est solution particulière de $y'' - 4y' + 4y = e^{2x}$.

Par le principe de superposition, une solution particulière de $y''-4y'+4y = \operatorname{ch}(2x)$ est

$$\begin{aligned}
y(x) &= \frac{1}{2} \times \frac{1}{16}e^{-2x} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2}x^2e^{2x} \\
&= \frac{1}{32}e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2e^{2x}
\end{aligned}$$

Finalement, les solutions de : $y'' - 4y' + 4y = \operatorname{ch}(2x)$ sont

$$\boxed{y(x) = \frac{1}{32}e^{-2x} + \frac{1}{4}x^2e^{2x} + e^{2x}(A+Bx) \qquad \text{avec } A, B \in \mathbb{R}}$$

/19 **Exercice 2 : Calcul de limites**

Les deux questions de cet exercice sont indépendantes.

/4 **1)** Calculer $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{x}$. En déduire $\lim\limits_{x\to 0}(\tan(2x))(\ln x)$.

On pose $f : x \to \tan(2x)$. f est dérivable par composée, et pour tout $x \in D_f$,

$$f'(x) = 2\left(1+\tan^2(2x)\right)$$

Ainsi, pour tout $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[\setminus \{0\}$,

$$\frac{\tan(2x)}{x} = \frac{f(x)-f(0)}{x-0} \xrightarrow[x\to 0]{} f'(0) = 2\left(1+0^2\right) = \boxed{2}$$

Calculons la seconde limite. Pour tout $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$, on a

$$(\tan(2x))(\ln x) = \frac{\tan(2x)}{x} \times (x\ln x)$$

Or, $\frac{\tan(2x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} 2$ et par ailleurs $x\ln x \xrightarrow[x\to 0]{} 0$ par croissances comparées. On en déduit que

$$\lim_{x\to 0}(\tan(2x))(\ln x) = \boxed{0}$$

/2 **2)** **a)** Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x+\pi} - \sqrt{x}\right)$

Soit $x \geq 0$.

$$\sqrt{x+\pi} - \sqrt{x} = \frac{x+\pi-x}{\sqrt{x+\pi}+\sqrt{x}} = \frac{\pi}{\sqrt{x+\pi}+\sqrt{x}} \xrightarrow[x\to+\infty]{} \boxed{0}$$

/4 **b)** Montrer que : $\quad \forall a, b \in \mathbb{R} \quad \sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Posons, pour simplifer, $A = \frac{a}{2}$ et $B = \frac{b}{2}$

$$\begin{aligned}
& 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right) \\
=& 2\cos(A+B)\sin(A+B) \\
=& 2\left(\cos A\cos B - \sin A\sin B\right)\left(\sin A\cos B - \sin B\cos A\right) \\
=& 2\cos A\sin A\cos^2 B - 2\cos^2 A\cos B\sin B \\
& - 2\sin^2 A\sin B\cos B + 2\sin A\cos A\sin^2 B \\
=& \sin(2A)\cos^2 B - \cos^2 A\sin(2B) - \sin^2 A\cos(2B) + \sin(2A)\sin^2 B \\
=& \sin(2A) - \sin(2B) \\
=& \sin a - \sin b
\end{aligned}$$

/4 **c)** En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+\pi} - \sin\sqrt{x}\right)$.

Soit $x \in \mathbb{R}_+$. Par la question 2)b), on a

$$\sin\sqrt{x+\pi} - \sin\sqrt{x} = 2\cos\left(\frac{\sqrt{x+\pi}+\sqrt{x}}{2}\right)\sin\left(\frac{\sqrt{x+\pi}-\sqrt{x}}{2}\right)$$

Or, par la question 2)a), on a $\sqrt{x+\pi} - \sqrt{x} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$. Donc $\dfrac{\sqrt{x+\pi}-\sqrt{x}}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$ et par composition, comme sin est continue en 0 (ou encore comme $\sin y \xrightarrow[y\to 0]{} 0$), on a

$$\sin\left(\frac{\sqrt{x+\pi}-\sqrt{x}}{2}\right) \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0$$

Par ailleurs, on a toujours $-2 \leq 2\cos\left(\dfrac{\sqrt{x+\pi}+\sqrt{x}}{2}\right) \leq 2$. Le produit de ces deux termes tend donc vers 0 :

$$\boxed{\lim_{x\to+\infty}\left(\sin\sqrt{x+\pi} - \sin\sqrt{x}\right) = 0}$$

/5 **d)** Est-ce que la limite suivante existe : $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sin(x+\pi) - \sin x)$? Justifier.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$ les suites de termes généraux :

$$x_n = 2n\pi \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty \qquad y_n = 2n\pi - \frac{\pi}{2} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty$$

On remarque que

$$\sin(x_n+\pi) - \sin x_n = \sin\pi - \sin 0 = 0 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

$$\sin(y_n+\pi) - \sin y_n = \sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = 1-(-1) = 2 \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2$$

On en déduit que la limite de $\sin(x+\pi) - \sin x$ quand x tend vers $+\infty$ ne peut pas exister, par la caractérisation séquentielle de la limite.

/21,5 Exercice 3 : Périodes de $\mathbb{1}_{\mathbb{Q}}$

/3 **1)** Que peut-on dire de la somme de deux rationnels ? Justifier.

Soit q, q' deux rationnels. Il existe donc $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $b, b' \in \mathbb{Z}^*$ tels que $q = \dfrac{a}{b}$ et $q' = \dfrac{a'}{b'}$. Dans ce cas,

$$q + q' = \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{ab'+a'b}{bb'}$$

Or, il est clair que $ab'+a'b$ est un entier, et que bb' est un entier non nul car b et b' le sont. Ainsi, $q+q'$ est un rationnel.

/6,5 **2)** Que peut-on dire de la somme d'un rationnel et d'un irrationnel ? Justifier.

Soit q un rationnel et r un irrationnel. Montrons que $q+r$ est irrationnel. Supposons par l'absurde que $q+r$ est rationnel. Il existe donc $a, a' \in \mathbb{Z}$ et $b, b' \in \mathbb{Z}^*$ tels que $q = \dfrac{a}{b}$ et $q+r = \dfrac{a'}{b'}$. Dans ce cas,

$$r = (q+r) - q = \frac{a'}{b'} - \frac{a}{b}$$

et on montre comme à la question précédente que r est rationnel. Contradiction. Donc $q+r$ est irrationnel.

On note f la fonction indicatrice sur $\mathbb{Q}$, ainsi que $\mathscr{P}$ l'ensemble des périodes de f :

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q} \end{cases} \qquad \mathscr{P} = \{T > 0 \mid \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)\}$$

L'objectif est de déterminer l'ensemble $\mathscr{P}$.

/5 **3)** On pose $\mathbb{Q}_+^* = \mathbb{Q} \cap]0,+\infty[$. Montrer que $\mathbb{Q}_+^* \subset \mathscr{P}$.

Soit $T \in \mathbb{Q}_+^*$. Montrons que $T \in \mathscr{P}$. On a déjà $T > 0$. Ensuite, montrons que $\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x+T) = f(x)$. Soit $x \in \mathbb{R}$.

- Si $x \in \mathbb{Q}$, alors par la question 1, $x + T \in \mathbb{Q}$. Donc $f(x+T) = 1 = f(x)$.
- Si $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$, alors par la question 2, $x+T \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Donc $f(x+T) = 0 = f(x)$.

Ainsi, on a bien $T \in \mathscr{P}$.

/4 **4)** On suppose qu'il existe un élément $T \in \mathscr{P}$ irrationnel. Déduire une contradiction.

Comme $T \in \mathscr{P}$, on a en particulier $f(T) = f(0)$. Or, $f(0) = 1$ et $f(T) = 0$ car T est irrationnel. Contradiction.

/3 **5)** Que vaut finalement l'ensemble $\mathscr{P}$?

Montrons que $\mathscr{P} = \mathbb{Q}_+^*$. Une inclusion est évidente par la question 3. Montrons que $\mathscr{P} \subset \mathbb{Q}_+^*$. Soit $T \in \mathscr{P}$. Montrons que $T \in \mathbb{Q} \cap \mathbb{R}_+^*$.

- Comme $T \in \mathscr{P}$, on a $T > 0$, i.e. $T \in \mathbb{R}_+^*$.
- Supposons par l'absurde que $T \notin \mathbb{Q}$. Alors $T \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, ce qui contredit la question 4. Ainsi, $T \in \mathbb{Q}$

Finalement, $T \in \mathbb{Q}_+^*$, donc $\mathscr{P} \subset \mathbb{Q}_+^*$. En conclusion, $\boxed{\mathscr{P} = \mathbb{Q}_+^*}$

/31,5 Problème : Pondération binomiale

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On définit une suite réelle $(a_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en posant : $\forall n \in \mathbb{N} \quad a_n^* = \dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a_k$.

/1,5 **1)** Justifier brièvement la relation $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = 2^n$.

Par la formule du binôme,

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n$$

2) Soit $k \in \mathbb{N}$ fixé.

/2,5 **a)** En utilisant la forme exponentielle, montrer que $\dfrac{1}{2^n}n^k \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$

$$\frac{1}{2^n}n^k = \frac{e^{k\ln n}}{e^{n\ln 2}} = e^{k\ln n - n\ln 2} = e^{n\left(-\ln 2 + \frac{k}{n}\ln n\right)}$$

Or, par croissances comparées, $\dfrac{\ln n}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$. Donc $-\ln 2 + \dfrac{k}{n}\ln n \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\ln 2 < 0$. Par produit,

$$n\left(-\ln 2 + \frac{k}{n}\ln n\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} -\infty$$

Or, $e^x \xrightarrow[x\to-\infty]{} 0$. Par composition, $e^{n\left(-\ln 2 + \frac{k}{n}\ln n\right)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$

/5 **b)** Montrer que $\dfrac{1}{n^k}k!\dbinom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$.

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n^k}k!\binom{n}{k} &= \frac{1}{n^k} \times \frac{n!}{(n-k)!} \\
&= \frac{1}{n^k} \times n(n-1) \times \ldots \times (n-k+1) \\
&= \frac{n}{n} \times \frac{n-1}{n} \times \ldots \times \frac{n-k+1}{n} \\
&= 1 \times \left(1 - \frac{1}{n}\right) \times \left(1 - \frac{2}{n}\right) \times \ldots \times \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)
\end{aligned}$$

Comme k est fixé, on constate que chaque terme de ce produit tend vers 1. Par produit (d'un nombre fini de termes), $\dfrac{1}{n^k}k!\dbinom{n}{k} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$.

/3 **c)** En déduire que $\dfrac{1}{2^n}\dbinom{n}{k}|a_k| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$. Par les questions précédentes,

$$\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k| = \frac{n^k}{2^n} \times \frac{k!}{n^k}\binom{n}{k} \times \frac{|a_k|}{k!} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times 1 \times \frac{|a_k|}{k!} = 0$$

3) On suppose que (a_n) converge vers 0. Soit $\varepsilon > 0$.

/5 **a)** Montrer qu'il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N \quad |a_n^*| \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{N}\frac{1}{2^n}\binom{n}{k}|a_k| + \frac{\varepsilon}{2^n}\sum_{k=N+1}^{n}\binom{n}{k}$.

Comme (a_n) converge vers 0, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\forall n \geq N \qquad |a_n| \leq \varepsilon$$

Ainsi, pour tout $n \geq N$, on a :

$$\begin{aligned}
|a_n^*| &= \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} a_k \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} a_k + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} a_k \right| \\
&\leq \left| \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} a_k \right| + \left| \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} a_k \right| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| + \sum_{k=N+1}^{n} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} \varepsilon \qquad \text{car } |a_k| \leq \varepsilon \text{ si } k \geq N+1 \\
&= \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k}
\end{aligned}$$

/5 **b)** Montrer qu'il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \geq N' \quad \displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| \leq \varepsilon$.

Par la question 2.c), pour tout $k \in [\![0, N]\!]$, on a

$$\frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$$

On en déduit que, par somme $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$. En particulier, il existe $N' \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N'$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| \leq \varepsilon$

/4,5 **c)** En déduire que (a_n^*) converge vers 0.

On pose $N'' = \max(N, N') \in \mathbb{N}$. Soit $n \geq N''$. Par la question 3.a), on a

$$|a_n^*| \leq \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| + \frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k}$$

Par la question 3.b), comme $n \geq N'$,

$$\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k} |a_k| \leq \varepsilon$$

De plus, par la question 1,

$$\frac{1}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} \leq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 1$$

et donc $\displaystyle\frac{\varepsilon}{2^n} \sum_{k=N+1}^{n} \binom{n}{k} \leq \varepsilon$. Ainsi, on a

$$|a_n^*| \leq \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

Finalement, par arbitraire sur ε, on a montré :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N'' \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq N'' \qquad |a_n^*| \leq 2\varepsilon$$

Cela suffit pour conclure que $a_n^* \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} 0$.

/5 **4)** Soit $\ell \in \mathbb{R}$. Montrer que si (a_n) converge vers ℓ, alors (a_n^*) converge vers ℓ.

On suppose que (a_n) converge vers ℓ. Alors la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de terme général $b_n = a_n - \ell$ converge vers 0. Par ce qui précède, la suite (b_n^*) converge vers 0. Or,

$$\begin{aligned}
b_n^* &= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_n \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (a_n - \ell) \\
&= \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_n - \ell \times \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \\
&= a_n^* - \ell
\end{aligned}$$

Comme $b_n^* \to 0$, on a également $a_n^* - \ell \to 0$. On en conclut que $a_n^* \to \ell$.

/28 **Exercice 4 : Limites supérieure et inférieure d'une suite**

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle bornée. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_n l'ensemble des termes de cette suite ayant un rang supérieur ou égal à n, c'est-à-dire :

$$A_n = \{u_k \mid k \geq n\}$$

1) Justifier l'existence des suites $(u_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad u_n^+ = \sup A_n \qquad u_n^- = \inf A_n$$

/4

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, il existe $M \in \mathbb{R}$ tel que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $|u_k| \leq M$. En particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$, tout élément de l'ensemble A_n est majoré par M et minoré par $-M$. De plus, A_n est non vide car $u_n \in A_n$. Enfin, A_n est clairement une partie de $\mathbb{R}$ car (u_n) est une suite réelle.

Ainsi, A_n admet une borne supérieure et une borne inférieure. On en conclut que u_n^+ et u_n^- ont bien un sens.

/2 **2)** Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} \quad A_{n+1} \subset A_n$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Soit $x \in A_{n+1}$. Montrons que $x \in A_n$. Comme $x \in A_{n+1}$, il existe $k \geq n+1$ tel que $x = u_k$. En particulier, on a donc $x = u_k$ avec $k \geq n$, ce qui montre que $x \in A_n$. Finalement, $A_{n+1} \subset A_n$.

/6 **3)** En déduire que (u_n^+) et (u_n^-) convergent.

Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $u_{n+1}^+ \leq u_n^+$. Comme $u_n^+ = \sup A_n$, on en déduit que u_n^+ majore A_n. Comme $A_{n+1} \subset A_n$, u_n^+ majore également A_{n+1}. Or, u_{n+1}^+ est le plus petit des majorants de A_{n+1}. Ainsi, $u_{n+1}^+ \leq u_n^+$. La suite (u_n^+) est donc décroissante.

Or, (u_n) est minorée par $-M$ (défini en question 1), et comme $u_n \in A_n$, on a donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n^+ \geq u_n \geq -M$. Donc (u_n^+) est décroissante et minorée : elle converge donc.

De même, on montre que (u_n^-) est croissante et majorée par M donc converge.

/4 **4)** Montrer que si (u_n^+) et (u_n^-) convergent vers la même limite ℓ, alors (u_n) converge vers ℓ.

Comme $u_n^+ = \sup A_n$, u_n^+ est un majorant de A_n. Or, comme $u_n \in A_n$, on en déduit que $u_n \leq u_n^+$. De même, on a $u_n^- \leq u_n$. Ainsi

$$u_n^- \leq u_n \leq u_n^+$$

De ce fait, si (u_n^+) et (u_n^-) convergent vers la même limite ℓ, alors par encadrement, (u_n) converge aussi vers ℓ.

/12 **5)** Montrer que (u_n) converge si et seulement si $u_n^+ - u_n^- \to 0$.

On raisonne par double implication.

- Supposons $u_n^+ - u_n^- \to 0$. Par la question 3, on sait que (u_n^+) est décroissante, que (u_n^-) est croissante, et donc (u_n^+) et (u_n^-) sont adjacentes. Elles convergent donc vers la même limite. Par la question 4, on en déduit que (u_n) converge.
- Réciproquement, supposons que (u_n) converge. Notons $\ell = \lim u_n$. Montrons que (u_n^+) et (u_n^-) tendent vers ℓ. Par ce qui précède, on sait que (u_n^+) converge, vers une limite qu'on notera ℓ^+. Comme on a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n \leq u_n^+$$

en passant à la limite, on en déduit que $\ell \leq \ell^+$. Supposons par l'absurde que $\ell < \ell^+$. On pose $\varepsilon = \dfrac{\ell^+ - \ell}{2}$. Par définition de $u_n \to \ell$, il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$|u_n - \ell| \leq \varepsilon$$

ou encore $u_n \in [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$. Comme ceci est vrai pour tout $n \geq N$, on en déduit que $A_N \subset [\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon]$, donc que

$$u_N^+ \leq \ell + \varepsilon = \frac{\ell + \ell^+}{2}$$

Or, (u_n^+) est une suite décroissante, donc on en déduit que

$$\forall n \geq N \qquad u_n^+ \leq u_N^+ \leq \frac{\ell + \ell^+}{2}$$

En passant à la limite dans $u_n^+ \leq \dfrac{\ell + \ell^+}{2}$, on trouve $\ell^+ \leq \dfrac{\ell + \ell^+}{2}$, donc $2\ell^+ \leq \ell + \ell^+$, ou encore $\ell^+ \leq \ell$. Contradiction (car on a supposé $\ell < \ell^+$). Ainsi, $\ell < \ell^+$ est faux, donc $\ell^+ \leq \ell$. Comme on a aussi $\ell \leq \ell^+$, on en conclut que $\ell = \ell^+$. De même, on montre que $\lim u_n^- = \ell$. Ainsi,

$$u_n^+ - u_n^- \to \ell - \ell = 0$$

Finalement, on a bien montré l'équivalence.